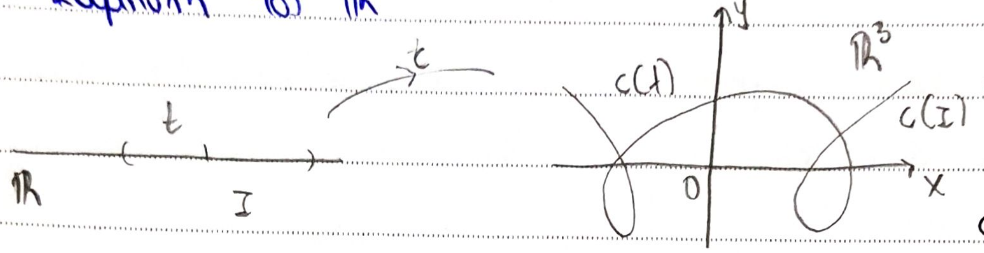
11/10/2018
2º μάθημα
1

Καμπύλες του $\mathbb{R}^2$

Ορισμός: Κάθε απεικόνιση $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ τάξης C^r, $r \geq 1$ καλείται καμπύλη του $\mathbb{R}^2$



$c(I)$: εικόνα της c

t: παράμετρος της c

$c(t) = (x(t), y(t))$ Παραμετρική παράσταση της c

συναρτήσεις συντεταγμένων της c

Γεωμετρική ισοτιμία καμπυλών

Ορισμός: Δύο καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες αν-ν υπάρχει ισομετρία $T \in Isom(\mathbb{R})$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$

$T \in Isom(\mathbb{R}^2)$, $T = T_v \circ A$

T_v = παράλληλη μεταφορά κατά v

$$A \in O(2) \Rightarrow \begin{cases} \det A = 1 \\ \\ \det A = -1 \end{cases}$$

• Αν $\det A = 1$ $A = R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στροφή κατά γωνία θ είναι δηλαδή η γραμμική απεικόνιση με πίνακα $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ως προς την σύνηθη βάση του $\mathbb{R}^2$ | $R_\theta \circ R_\phi = R_{\theta+\phi}$

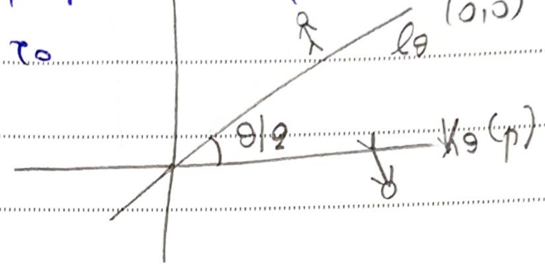
$J = R_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

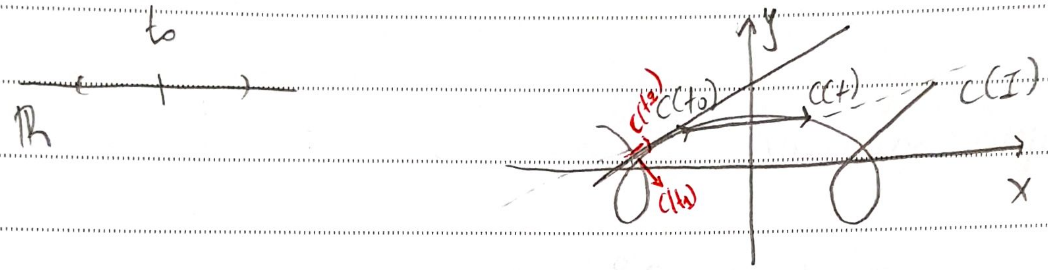
$J^2 = J \circ J = R_{\frac{\pi}{2}} \circ R_{\frac{\pi}{2}} = R_\pi = -Id$

$J^2 = -Id$ $\quad$ J: καλείται μιγαδική δομή.

• $\det A = -1$: $A = K_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση με πίνακα $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ ως προς τη συνήθη βάση

K_θ είναι κατοπτρισμός ως προς την ευθεία ℓ_θ που διέρχεται από το $(0,0)$





$t_0 \in I$, $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$

Ορισμός: Για $t_0 \in I$, το διάνυσμα $c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο t_0 ή διάνυσμα ταχύτητας της c στο t_0.

Κανονικές Καμπύλες

Ορισμός: Μια καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $c(t) = (x(t), y(t))$ καλείται κανονική αν-ν $c'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Για κανονικές καμπύλες c η εφαπτόμενη ευθεία στο $t_0 \in I$ είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $c(t_0)$ και είναι $\parallel c'(t_0)$

Ερώτημα: Είναι η κανονικότητα γεωμετρική εικόνα;
Δηλαδή αν $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ είναι κανονική καμπύλη και $T = T_v \circ A \in Isom(\mathbb{R}^2)$ είναι η $\tilde{c} = T \circ c$ κανονική;

Απόδειξη

$c(t) = (x(t), y(t))$, $\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$

$T_v(p) = p + v$, A έχει πίνακα $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ορθογώνιο

$$\tilde{c}(t) = T(c(t)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad v = (v_1, v_2)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'(t) \\ \tilde{y}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{c}'(t) = A(c'(t))} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Η $\tilde{c}$ είναι κανονική

$$\|\tilde{c}'(t)\| = \|A(c'(t))\| = \|c'(t)\| > 0$$

Παραδείγματα Καμπυλών

① $p \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Ορίζω την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $c(t) = p + tv$,

$c'(t) = v \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Η c είναι κανονική

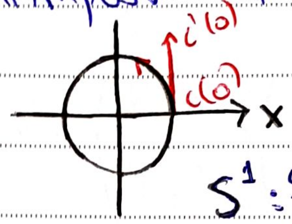
Η εικόνα της $c(\mathbb{R})$ = ευθεία που διέρχεται από το p και $\parallel v$

② $p\in\mathbb{R}^2$, $u\in\mathbb{R}^2-\{0\}$. Ορίζω την καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $c(t)=p+t^3u$, $t\in\mathbb{R}$
$c(\mathbb{R})=$ ευθεία η οποία διέρχεται από το p και είναι $\parallel u$

$c'(t)=2t^2u$ $\quad c'(0)=0 \Rightarrow$ Η c <u>ΔΕΝ</u> είναι κανονική.

③ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\quad c(t)=(\underbrace{\cos t}_{x(t)},\underbrace{\sin t}_{y(t)})$, $t\in\mathbb{R}$

Η c είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας
$c'(t)=(-\sin t,\cos t)\neq(0,0)$ $\forall\, t\in\mathbb{R}$. Άρα, η c είναι κανονική.
Τα σημεία της εικόνας πληρούν $x^2+y^2=1$.

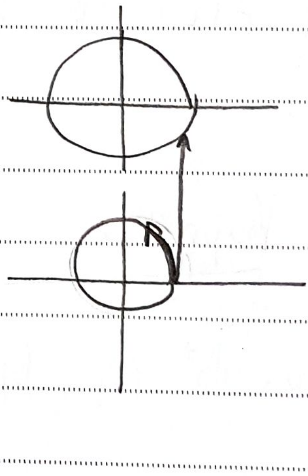


$\mathbb{R}$

$S^1:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$
θα συμβολίζουμε τον μοναδιαίο κύκλο

$c(0)=(1,0)$
$c'(0)=(0,1)$

④ $c_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\quad c_1(t)=(\cos t,-\sin t)$
$c_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\quad c_2(t)=(\cos 2t,\sin 2t)$



$c_2'(t)=2(-\sin 2t,\cos 2t)$
$\|c_2'(t)\|=2$

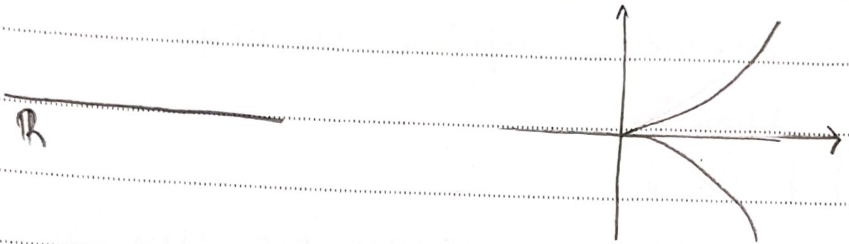
$c_3(t)=(\cos t^2,\sin t^2)$
$c_3'(t)=2t(-\sin t^2,\cos t^2)$
$c_3'(0)=0$

⑤ Θεωρώ την καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$c(t)=(t^2,t^3)$, $t\in\mathbb{R}$

$c'(t)=(2t,3t^2)$

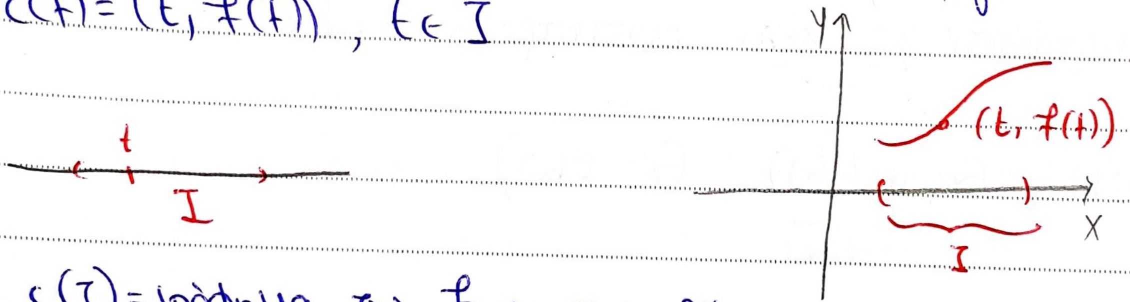
$c'(0)=(0,0) \Rightarrow$ ΔΕΝ είναι κανονική.



⑥ Καμπύλες Γραφήματα

Θεωρώ λεία συνάρτηση $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ορίζω την καμπύλη $c: I\to\mathbb{R}^2$

$c(t)=(t,f(t))$, $t\in I$

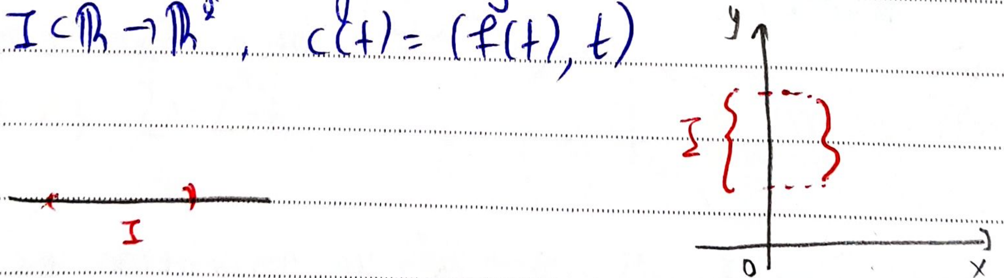


$c(I)$ = γράφημα της f ως προς Ox

c κανονική

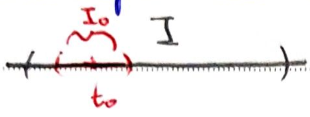
Γραφήματα ως προς άξονα Oy

$c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $c(t)=(f(t),t)$



Πρόταση

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη. Για κάθε $t_0 \in I$ υπάρχει διάνυσμα $I_0 \subset \mathbb{R}$ με $t_0 \in I_0$ ώστε η $c|_{I_0}$ να είναι γράφημα (είτε ως προς Ox είτε ως προς Oy).



Ειδικά, κάθε κανονική καμπύλη αυτοτομές.

Απόδειξη

$$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$$

Έστω ότι $x'(t_0) \neq 0$. Λόγω συνέχειας υπάρχει διάνυσμα $I_0 \subset I$ ώστε $t_0 \in I$ και $x'(t) \neq 0 \ \forall t \in I_0$.

↳ σημαίνει ότι το διάνυσμα ταχύτητας δεν μπορεί να είναι παράλληλο στον άξονα των y.

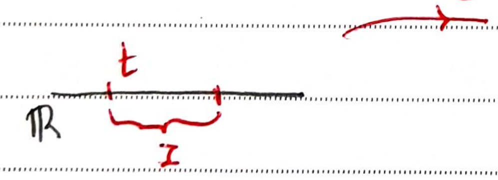
Σύμφωνα με το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης η συνάρτηση $x \subset x(t)$ αντιστρέφεται με λεία αντίστροφο $t = t(x)$.

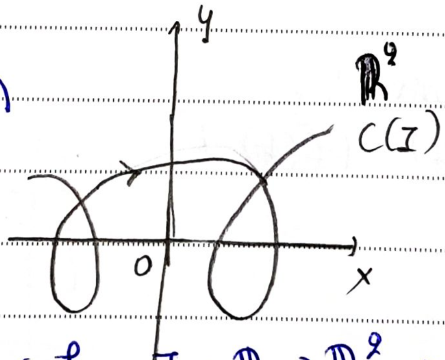
Για $t \in I_0$

$$(x(t), y(t)) = (x, \underbrace{y(t(x))}_{f(x)}) = (x, f(x))$$

Αναπαραμετρήσεις Καμπυλών

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη





Θεωρώ λεία συνάρτηση $f: J \to I$, $t \in f(r)$

Ορίζω την λεία καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$ $J \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο $\sigma \in J$

Το διάνυσμα ταχύτητας της $\tilde{c}$ είναι $\frac{d\tilde{c}}{d\sigma} = \frac{dt}{d\sigma}\frac{dc}{dt} = \frac{df}{d\sigma} \cdot \frac{dc}{dt}$

Υποθέτω ότι η c είναι κανονική.

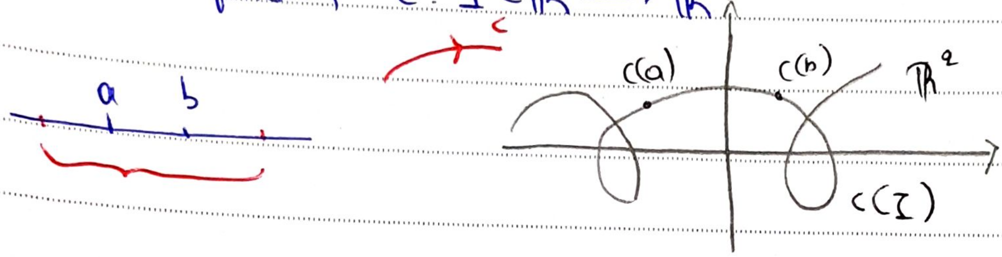
Τότε η $\tilde{c}$ είναι κανονική $\iff \frac{df}{d\sigma}(\sigma) \neq 0 \ \forall \sigma \in J$

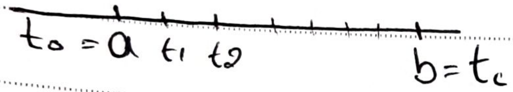
$\iff \frac{dt}{d\sigma}(\sigma) > 0 \ \forall \sigma \in J$ ή $\frac{dt}{d\sigma}(\sigma) < 0 \ \forall \sigma \in J$.

Σε αυτή την περίπτωση η $\tilde{c}$ καλείται αναπαραμέτρηση της κανονικής καμπύλης c.

Μήκος Καμπύλης

Θεωρώ καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$





Θεωρώ διαμέριση $P=\{a=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=b\}$

Λεπτότητα της P είναι ο αριθμός $|P|=\max\{t_i-t_{i-1} / i=1,\dots,k\}$
Τα σημεία $c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_k)$ είναι κορυφές πολυγώνου γραφημάτων με μήκη $L(c,P)=\sum_{i=1}^{k}\|c(t_i)-c(t_{i-1})\|$

Υποθέτω ότι η c είναι C^1. Τότε αποδεικνύεται ότι για κάθε ακολουθία διαμερίσεων P_n του $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty}|P_n|=0$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} L(c,P_n)\in\mathbb{R}$$

και μάλιστα ΔΕΝ εξαρτάται από την ακολουθία P_n.
Ο αριθμός καλείται μήκος της c από το a έως το b, συμβολίζεται με $L_a^b(c)=\int_a^b\|c'(t)\|dt$